ECOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES — ECOLE SUPERIEURE D'ELECTRICITE
ECOLE CENTRALE DE LYON — ECOLE SUPERIEURE D'OPTIQUE

Concours d'admission 1981

Option TA — MATHEMATIQUES I — (4 h)

(Deux pages dactylographiées)

N.B. 1- Le symbole ln désigne le logarithme népérien.

N.B. 2- On rappelle que la suite $n \mapsto x_n$ d'éléments de $\mathbb{R}$ (resp.$\mathbb{C}$) est dite suite de Cauchy si et seulement si :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad \forall p \geq N \quad |x_n - x_p| < \varepsilon$$

On rappelle en outre que, sur $\mathbb{R}$ (resp.$\mathbb{C}$), toute suite convergente est une suite de Cauchy et toute suite de Cauchy est convergente.

Pour toute suite réelle ou complexe u, le symbole $\prod_q^\infty u(n)$, où q est un entier naturel donné, désigne la limite, si elle existe de la suite p définie par :

$$n \mapsto \prod_q^n u(k) = u(q).u(q+1)....u(n) \quad , (n \geq q).$$

Partie I

I.1 Démontrer l'existence et calculer les valeurs de :

$$\prod_2^\infty (1 - \frac{1}{n}) \quad ; \quad \prod_2^\infty (1 - \frac{1}{n^2}) \quad ; \quad \prod_2^\infty (1 - \frac{2}{n(n+1)}) \quad .$$

I.2. Soit u une suite réelle vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 < u(n) < 1$.

a) Montrer que $\prod_0^\infty u(n)$ existe. Démontrer que $\prod_0^\infty u(n)$ est non nul si et seulement si la série de terme général ln u(n) est convergente.

b) Montrer que $\prod_0^\infty (1 + u(n))$ existe si, et seulement si la série de terme général u(n) est convergente.

c) Montrer que $\prod_0^\infty (1 + u(n))$ existe si, et seulement si $\prod_0^\infty (1 - u(n))$ existe et est non nul.

Partie II

II.1. Démontrer l'existence et calculer les valeurs de :

$$\prod_2^\infty (1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}) \quad ; \quad \prod_2^\infty (1 + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}).$$

II.2. Soit u une suite réelle vérifiant les deux conditions :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} \quad |u(n)| < 1 \\ \text{La série de terme général } u_n \text{ est convergente.} \end{cases}$$

a) Montrer que $\prod_0^\infty (1 + u(n))$ existe.

b) Montrer que $\prod_0^\infty (1 + u(n)) = 0$ si et seulement si la série de terme général $(u(n))^2$ est divergente.

Partie III

III.1. Soit a la suite réelle définie, pour $n \geq 1$ par :

$$a(2n) = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n\sqrt{n}} \quad ; \quad a(2n-1) = -\frac{1}{\sqrt{n}}$$

a) Etudier la nature des séries de termes généraux a(n) et $(a(n))^2$.

b) Montrer l'existence et calculer la valeur de $\prod_3^\infty (1 + a(n))$.

III.2. Soit u une suite réelle vérifiant les deux conditions :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} \quad |u(n)| < 1 \\ \prod_0^\infty (1 + u(n)) \text{ existe et est non nul.} \end{cases}$$

.../...

a) Montrer que la série de terme général u(n) est convergente si, et seulement si la série de terme général $(u(n))^2$ est convergente.

b) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \sum_{0}^{n} u(k) = +\infty$ si, et seulement si la série de terme général $(u(n))^2$ est divergente.

Partie IV

Soit u une suite complexe vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N} \qquad u(n) \neq -1$.

Montrer que si $\prod_{0}^{\infty} (1 + u(n))$ existe et vaut 0, alors la série de terme général $\ln|1 + u(n)|$ est divergente ; de quelle manière ?

Partie V

Soit u une suite complexe vérifiant les deux conditions :

$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} \qquad |u(n)| < 1 \\ \text{La série de terme général } u(n) \text{ est absolument convergente.} \end{cases}$

Pour tout nombre complexe non nul z, on note Arg z l'unique réel tel que :

$$-\pi < \text{Arg } z \leqslant \pi \qquad \text{et} \qquad z = |z| e^{i \text{ Arg } z}$$

a) Montrer que $\prod_{0}^{\infty} (1 + |u(n)|)$ existe. Montrer que ce réel est strictement supérieur à 1 à une condition que l'on précisera.

b) Montrer que la suite p définie par $n \longmapsto \prod_{0}^{n} (1 + u(k))$ est une suite de Cauchy. On pourra démontrer et utiliser :

$$\left|\prod_{1}^{n} (1 + a_k) - 1\right| \leqslant \prod_{1}^{n} (1 + |a_k|) - 1 \quad .$$

En déduire que $\prod_{0}^{\infty} (1 + u(n))$ existe.

c) Montrer que la série de terme général $\ln|1 + u(n)|$ est absolument convergente.

d) Montrer : $\prod_{0}^{\infty} (1 + u(n)) \neq 0$

e) Montrer que la série de terme général $\text{Arg}|1 + u(n)|$ est absolument convergente.

Partie VI

Soit u une suite complexe vérifiant :

$\prod_{0}^{\infty} (1 + u(n))$ existe et est non nul

a) Montrer que la suite u ne prend pas la valeur -1 et qu'elle admet 0 pour limite.

b) Montrer que la série de terme général $\ln|1 + u(n)|$ est convergente.

*****
***
*

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail